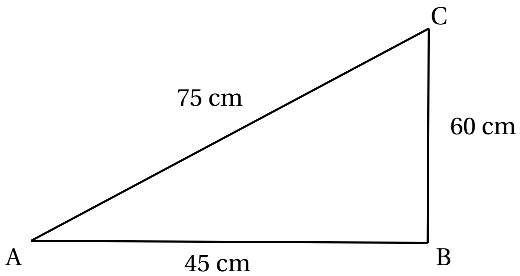
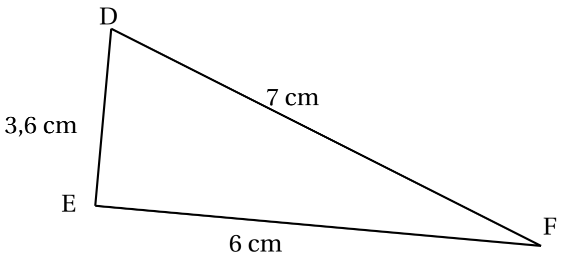
Exercices corrigés sur la réciproque du théorème de Pythagore

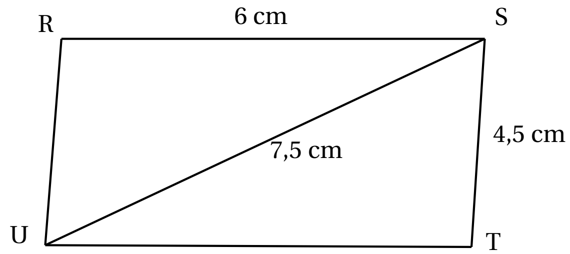
Exercice 1 : Le triangle ABC est-il rectangle ?



Exercice 2 : Le triangle DEF est-il rectangle ?



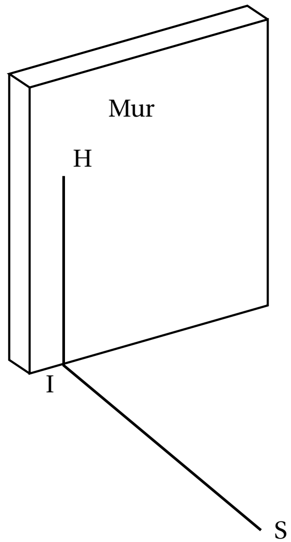
Exercice 3 : On considère le parallélogramme $RSTU$ ci-dessous.



Démontrer que le parallélogramme $RSTU$ est un rectangle.

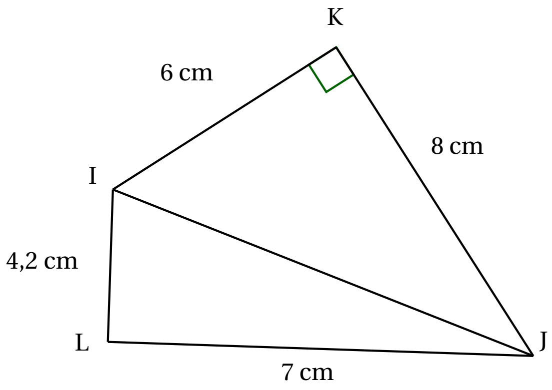
Exercice 4 : *(Nouvelle-Calédonie 2013)*

Au lycée professionnel, Jacques et Patrick, futurs maçons, s'entrainent en construisant un mur chacun.
Leur professeur M. Ecker vient vérifier si chaque mur est bien droit, c'est-à-dire perpendiculaire au sol.
Ayant oublié sa caisse à outils dans son atelier, il ne possède que le mètre ruban qu'il avait dans sa poche.
Pour chacun des murs, M. Ecker place au pied du mur un point I puis un point H à 60 cm de hauteur sur le mur et un autre point S au sol à 80 cm de I, puis il mesure la longueur HS.
Pour le mur de Jacques il trouve 1 m et pour celui de Patrick 95 cm.



1. Le mur de Jacques est-t-il « droit » ? Détailler votre raisonnement.
2. Et celui de Patrick ? Justifier.

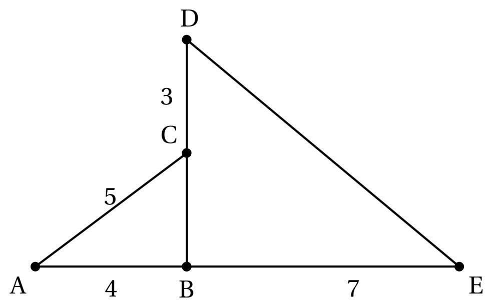
Exercice 5 :



1. Calculer la longueur IJ.
2. Prouver que les droites (IL) et (LJ) ne sont pas perpendiculaires perpendiculaires.

Exercice 6 : *(Nouvelle-Calédonie 2013)*
Sur le dessin ci-dessous, les points A, B et E sont alignés, et C le milieu de $[BD]$.
Les unités sont exprimées en cm.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. En déduire la nature du triangle BDE.
3. Calculer DE. Donner le résultats en cm et arrondir le résultat au dixième.



Exercices corrigés sur la réciproque du théorème de Pythagore

Correction exercice 1 : Dans le triangle ABC, $[AC]$ est le plus grand côté.

$$\left.\begin{array}{l} AC^2 = 75^2 = 5\,625 \\ \\ AB^2 + BC^2 = 45^2 + 60^2 = 2\,025 + 3\,600 = 5\,625 \end{array}\right\} AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Comme $AC^2 = AB^2 + BC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en B d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

Correction exercice 2 : Dans le triangle DEF, $[DF]$ est le plus grand côté.

$$\left.\begin{array}{l} DF^2 = 7^2 = 49 \\ \\ DE^2 + EF^2 = 3{,}6^2 + 6^2 = 12{,}96 + 36 = 48{,}96 \end{array}\right\} DF^2 \neq DE^2 + EF^2$$

Comme $DF^2 \neq DE^2 + EF^2$, alors le triangle DEF n'est pas rectangle d'après la contraposée du théorème de Pythagore.

Correction exercice 3 : Un parallélogramme est un rectangle s'il possède un angle droit. Il suffit donc de prouver que le triangle STU est rectangle en T. $UT = 6$ cm car les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur. Dans le triangle STU, $[SU]$ est le plus grand côté.

$$\left.\begin{array}{l} SU^2 = 7{,}5^2 = 56{,}25 \\ \\ ST^2 + TU^2 = 4{,}5^2 + 6^2 = 20{,}25 + 36 = 56{,}25 \end{array}\right\} SU^2 = ST^2 + TU^2$$

Comme $SU^2 = ST^2 + TU^2$, alors le triangle STU est rectangle en T d'après la réciproque du théorème de Pythagore. Ainsi, l'angle $\widehat{STU}$ est droit et la parallélogramme $RSTU$ est bien un rectangle.

Correction exercice 4 :

1. 1 m = 100 cm Dans le triangle HIS, $[HS]$ est le plus grand côté.

$$\left.\begin{array}{l} HS^2 = 100^2 = 10\,000 \\ \\ HI^2 + IS^2 = 60^2 + 80^2 = 3\,600 + 6\,400 = 10\,000 \end{array}\right\} HS^2 = HI^2 + IS^2$$

   Comme $HS^2 = HI^2 + IS^2$, alors le triangle HIS est rectangle en I d'après la réciproque du théorème de Pythagore. Le mur de Jacques est droit.

2. Dans le triangle HIS, $[HS]$ est le plus grand côté.

$$\left.\begin{array}{l} HS^2 = 95^2 = 9\,025 \\ \\ HI^2 + IS^2 = 60^2 + 80^2 = 3\,600 + 6\,400 = 10\,000 \end{array}\right\} HS^2 \neq HI^2 + IS^2$$

   Comme $HS^2 \neq HI^2 + IS^2$, alors le triangle HIS n'est pas rectangle d'après la contraposée du théorème de Pythagore. Le mur de Patrick n'est pas droit.

Correction exercice 5 :

1. Dans le triangle IKJ rectangle en K, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$\begin{aligned} IJ^2 &= IK^2 + KJ^2 \\ IJ^2 &= 6^2 + 8^2 \\ IJ^2 &= 36 + 64 \\ IJ^2 &= 100 \\ IJ &= 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

2. Dans le triangle ILJ, $[IJ]$ est le plus grand côté.

$$\left.\begin{array}{l} IJ^2 = 10^2 = 100 \\ \\ IL^2 + LJ^2 = 4{,}2^2 + 7^2 = 17{,}64 + 49 = 66{,}64 \end{array}\right\} IJ^2 \neq IL^2 + LJ^2$$

   Comme $IJ^2 \neq IL^2 + LJ^2$, alors le triangle ILJ n'est pas rectangle d'après la contraposée du théorème de Pythagore.
   Donc les droites (IL) et (LJ) ne sont pas perpendiculaires.

Correction exercice 6 :

1. C est le milieu de $[BD]$ donc $BC = 3$ cm. Dans le triangle ABC, $[AC]$ est le plus grand côté.

$$\left.\begin{array}{l} AC^2 = 5^2 = 25 \\ \\ AB^2 + BC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \end{array}\right\} AC^2 = AB^2 + BC^2$$

   Comme $AC^2 = AB^2 + BC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en B d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

2. Les points A, B et E étant alignés, l'angle $\widehat{ABE}$ est plat. Il mesure donc 180°. Ainsi :

$$\widehat{DBE} = 180° - 90° = 90°$$

   Le triangle DBE est donc rectangle en B.

3. $DB = 3\text{ cm} + 3\text{ cm} = 6\text{ cm}$. Dans le triangle DBE rectangle en B, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$DE^2 = DB^2 + BE^2$$
$$DE^2 = 6^2 + 7^2$$
$$DE^2 = 36 + 49$$
$$DE^2 = 85$$
$$DE = \sqrt{85}$$
$$DE \approx 9{,}2\text{ cm}$$